

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА



3 Электродинамика

3.1 Векторный анализ

Векторный анализ — раздел математики, распространяющий методы математического анализа на векторы в двух или более измерениях. Объектами приложения векторного анализа являются:

1. векторные поля — отображения одного векторного пространства в другое;
2. скалярные поля — функции на векторном пространстве.

Наибольшее применение векторный анализ находит в физике и инженерии. Основные преимущества векторных методов перед традиционными координатными:

1. *Компактность*. Одно векторное уравнение объединяет несколько координатных, и его исследование чаще всего можно проводить непосредственно, не заменяя векторы на их координатную запись.
2. *Инвариантность*. Векторное уравнение не зависит от системы координат и без труда переводится в координатную запись в любой удобной системе координат.
3. *Наглядность*. Дифференциальные операторы векторного анализа и связывающие их соотношения обычно имеют простое и наглядное физическое истолкование.

Наиболее часто применяемые векторные операторы:

1. **ротор** и **дивергенция** — для векторных полей.
2. **градиент** и **лапласиан** — для скалярных полей.

3.1.1 Оператор набла

Оператор набла (оператор Гамильтона) — векторный дифференциальный оператор, обозначаемый символом $\vec{\nabla}$. Для трёхмерного евклидова пространства в прямоугольных декартовых координатах оператор набла определяется следующим образом:

$$\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k},$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — единичные орты для осей x , y , z , соответственно.

Через оператор набла естественным способом выражаются основные операции векторного анализа: grad (*градиент*), div (*дивергенция*), rot (*ротор*), а также оператор Лапласа.

Этот вектор приобретает смысл в сочетании со скалярной или векторной функцией, к которой он применяется.

Если умножить вектор $\vec{\nabla}$ на скаляр φ , то получится вектор

$$\vec{\nabla}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k},$$

который представляет собой *градиент* функции φ .

Если вектор $\vec{\nabla}$ скалярно умножить на вектор $\vec{a}$, получится скаляр

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{a} \equiv (\vec{\nabla}, \vec{a}) = \nabla_x a_x + \nabla_y a_y + \nabla_z a_z = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z},$$

то есть *дивергенция* вектора $\vec{a}$.

Если $\vec{\nabla}$ умножить на $\vec{a}$ векторно, то получится *ротор* вектора:

$$\vec{\nabla} \times \vec{a} \equiv [\vec{\nabla}, \vec{a}] = (\partial_y a_z - \partial_z a_y)\vec{i} + (\partial_z a_x - \partial_x a_z)\vec{j} + (\partial_x a_y - \partial_y a_x)\vec{k}.$$

Соответственно, скалярное произведение $\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \vec{\nabla}^2$ есть скалярный оператор, называемый *оператором Лапласа*. Последний обозначается также Δ . В декартовых координатах оператор Лапласа определяется следующим образом:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Поскольку оператор набла является дифференциальным оператором, то при преобразовании выражений необходимо учитывать как правила векторной алгебры, так и правила дифференцирования. Например:

$$\text{grad}(\psi\phi) = \vec{\nabla}(\psi\phi) = \psi\vec{\nabla}\phi + \phi\vec{\nabla}\psi,$$

то есть производная выражения, зависящего от двух полей, есть сумма выражений, в каждом из которых дифференцированию подвергается только одно поле.

3.1.2 Дивергенция

Дивергенция — дифференциальный оператор, отображающий векторное поле на скалярное (то есть операция дифференцирования, в результате применения которой к векторному полю получается скалярное поле), который определяет (для каждой точки), «насколько расходится входящее и исходящее из малой окрестности данной точки поле» (точнее — насколько расходятся входящий и исходящий поток).

Можно дать короткое определение дивергенции — это дифференциальный оператор на векторном поле, характеризующий поток данного поля через поверхность малой окрестности каждой внутренней точки области определения поля. Оператор дивергенции, применённый к полю $\vec{F}$, обозначают как $\text{div } \vec{F}$ или $\vec{\nabla} \cdot \vec{F}$.

Определение дивергенции выглядит так:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\Phi_F}{V},$$

где Φ_F — поток векторного поля $\vec{F}$ через сферическую поверхность площадью S , ограничивающую объём V . Ещё более общим, а потому удобным в применении, является определение, когда форма области с поверхностью S и объёмом V допускается любой. Единственным требованием является её нахождение внутри сферы радиусом, стремящимся к нулю.

Допустим, что векторное поле дифференцируемо в некоторой области. Тогда в трёхмерном декартовом пространстве дивергенция будет определяться выражением

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}.$$

С точки зрения физики, дивергенция векторного поля является показателем того, в какой степени данная точка пространства является источником или стоком этого поля:

- $\operatorname{div} \vec{F} > 0$ — точка поля является источником;
- $\operatorname{div} \vec{F} < 0$ — точка поля является стоком;
- $\operatorname{div} \vec{F} = 0$ — стоков и источников нет, либо они компенсируют друг друга.

Например, если в качестве векторного поля взять совокупность направлений наискорейшего спуска на земной поверхности, то дивергенция покажет местоположение вершин и впадин, причём на вершинах дивергенция будет положительна (направления спуска расходятся от вершин), а на впадинах отрицательная (ко впадинам направления спуска сходятся).

Следующие свойства могут быть получены из обычных правил дифференцирования.

1. Линейность: для любых векторных полей $\vec{F}$ и $\vec{G}$ и для всех действительных чисел a и b

$$\operatorname{div}(a\vec{F} + b\vec{G}) = a \operatorname{div} \vec{F} + b \operatorname{div} \vec{G}.$$

2. Если φ — скалярное поле, а $\vec{F}$ — векторное, тогда $\operatorname{div}(\varphi\vec{F}) = \operatorname{grad} \varphi \cdot \vec{F} + \varphi \operatorname{div} \vec{F}$.
3. Свойство, связывающее векторные поля $\vec{F}$ и $\vec{G}$, заданные в трёхмерном пространстве, с *потомом*: $\operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \vec{G} - \vec{F} \cdot \operatorname{rot} \vec{G}$.
4. Дивергенция от градиента есть лапласиан:

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \psi) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \psi) = (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\psi = \vec{\nabla}^2 \psi = \Delta \psi.$$

5. Дивергенция от ротора: $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) = 0$.

3.1.3 Ротор

Ротор, или **вихрь** — векторный дифференциальный оператор над векторным полем. Показывает, насколько и в каком направлении закручено поле в каждой точке. Ротор поля $\vec{F}$ обозначается символом $\text{rot } \vec{F}$ (в русскоязычной литературе) или $\text{curl } \vec{F}$ (в англоязычной литературе), а также $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ через оператор набла.

Ротор векторного поля — вектор, проекция которого на каждое направление равна пределу отношения циркуляции векторного поля по контуру L плоской площадки ΔS , перпендикулярной к этому направлению, к величине этой площадки, когда размеры площадки стремятся к нулю, а сама площадка стягивается в точку:

$$\text{rot}_{\vec{n}} \vec{a} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\oint_L \vec{a} \cdot d\vec{r}}{\Delta S}.$$

Нормаль $\vec{n}$ к площадке направлена так, чтобы при вычислении циркуляции обход по контуру L совершался против часовой стрелки.

В трёхмерной декартовой системе координат $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ вычисляется следующим образом:

$$\text{rot}(F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}) = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Для удобства запоминания можно условно представлять ротор как векторное произведение:

$$\text{rot } \vec{F} = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

Векторное поле, ротор которого равен нулю в любой точке, называется потенциальным (безвихревым).

Следующие свойства могут быть получены из обычных правил дифференцирования.

1. Линейность: для любых векторных полей $\vec{F}$ и $\vec{G}$ и для всех действительных чисел a и b

$$\text{rot}(a\vec{F} + b\vec{G}) = a \text{rot } \vec{F} + b \text{rot } \vec{G}.$$

2. Если φ — скалярное поле, а $\vec{F}$ — векторное, то $\text{rot}(\varphi \vec{F}) = \text{grad } \varphi \times \vec{F} + \varphi \text{rot } \vec{F}$.
3. Дивергенция ротора равна нулю $\text{div}(\text{rot } \vec{F}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{F}) = 0$. При этом верно и обратное: если поле $\vec{F}$ бездивергентно ($\text{div } \vec{F} = 0$), оно есть поле вихря некоторого поля $\vec{G}$ (векторный потенциал) $\vec{F} = \text{rot } \vec{G}$.
4. Если поле $\vec{F}$ потенциально ($\vec{F} = \text{grad } \varphi$), его ротор равен нулю (поле $\vec{F}$ — безвихревое) ($\text{rot } \vec{F} = 0$). Верно и обратное: если поле безвихревое ($\text{rot } \vec{F} = 0$), то оно потенциально ($\vec{F} = \text{grad } \varphi$) для некоторого скалярного поля φ .

5. **Теорема Стокса:** циркуляция вектора по замкнутому контуру, являющемуся границей некоторой поверхности, равна потоку ротора этого вектора через эту поверхность

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

3.1.4 Градиент

Градиент — характеристика, показывающая направление наискорейшего возрастания некоторой величины, значение которой меняется от одной точки пространства к другой. В математике, градиент функции f это вектор, который указывает направление наискорейшего роста этой функции, и чей модуль равен скорости ее изменения в этом направлении.

Для случая трёхмерного пространства, градиентом называется векторная функция с компонентами $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$, где φ — некоторая скалярная функция координат x, y, z .

Градиент обозначается $\text{grad } \varphi$ или, с использованием оператора набла, $\vec{\nabla} \varphi$. Из определения градиента следует, что:

$$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{e}_z$$

Смысл градиента любой скалярной функции f в том, что его скалярное произведение с бесконечно малым вектором перемещения $d\vec{x}$ дает **полный дифференциал** этой функции при соответствующем изменении координат в пространстве, на котором определена f , то есть линейную (в случае общего положения она же главная) часть изменения f при смещении на $d\vec{x}$. Применяя одну и ту же букву для обозначения функции от вектора и соответствующей функции от его координат, можно написать:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \dots = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = (\text{grad } f \cdot d\vec{x})$$

В различных отраслях физики используется понятие градиента различных физических полей. Например, *градиент концентрации* — нарастание или уменьшение по какому-либо направлению концентрации растворённого вещества, *градиент температуры* — увеличение или уменьшение по направлению температуры среды и т. д. Градиент может быть вызван различными причинами, например, механическим препятствием, действием электромагнитных, гравитационных или других полей или различием в растворяющей способности граничащих фаз.

3.1.5 Оператор Лапласа

Оператор Лапласа (лапласиан) — дифференциальный оператор, действующий в линейном пространстве гладких функций и обозначаемый символом Δ . Функции F он ставит в соответствие функцию $\sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} F$.

Оператор Лапласа эквивалентен последовательному взятию операций градиента и дивергенции: $\Delta = \operatorname{div} \operatorname{grad}$, таким образом значение оператора Лапласа в точке может быть истолковано как плотность источников (стоков) потенциального векторного поля $\operatorname{grad} F$ в этой точке. В декартовой системе координат оператор Лапласа часто обозначается следующим образом $\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \vec{\nabla}^2$, то есть в виде скалярного произведения оператора набла на себя.

С помощью данного оператора удобно записывать уравнения Лапласа, Пуассона и волновое уравнение. В физике оператор Лапласа применим в электростатике и электродинамике, во многих уравнениях физики сплошных сред, а также при изучении равновесия мембран, плёнок или поверхностей раздела фаз с поверхностным натяжением, в стационарных задач диффузии и теплопроводности, которые сводятся к обычным уравнениям Лапласа или Пуассона или к некоторым их обобщениям.